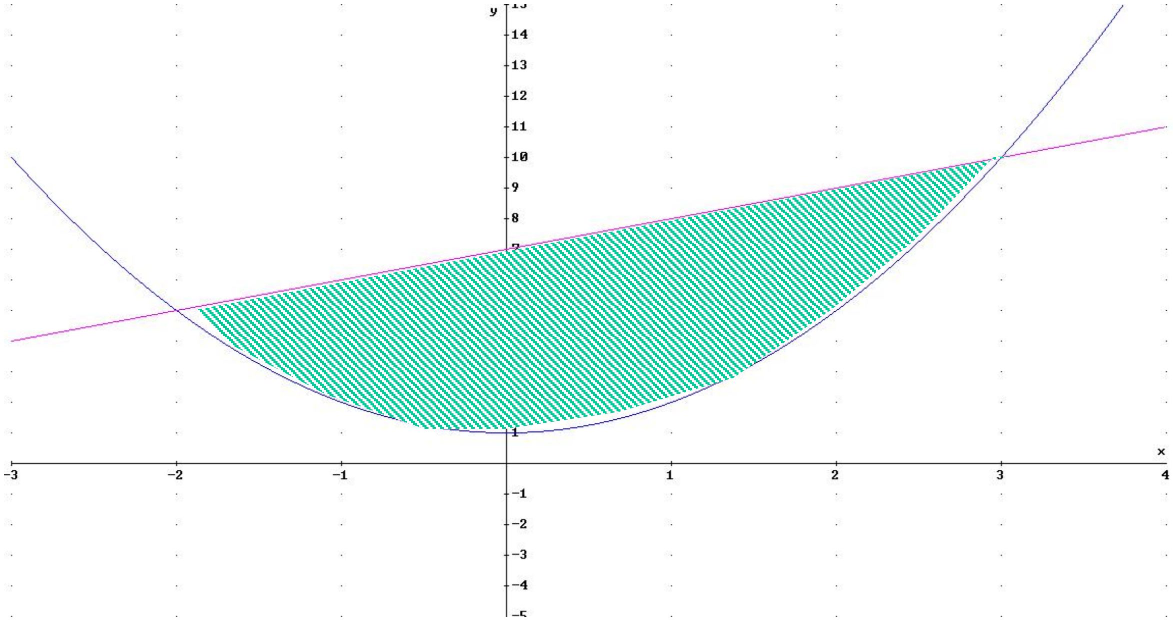
Berechnung von Flächen, die von den Graphen zweier Funktionen eingeschlossen werden

Der einfachste Fall-1

- Gegeben seien die Funktionen $f(x)=x^2+1$ und $g(x)=x+7$
- Gesucht ist die Fläche, die von den Graphen der Funktionen eingeschlossen wird.
- Berechne die Fläche nach dem Algorithmus LB S. 120 f.



1. Berechnung der Schnittpunkte

$$f(x) = g(x)$$
$$x^2 + 1 = x + 7$$
$$x^2 - x - 6 = 0$$
$$x_1 = -2$$
$$x_2 = 3$$

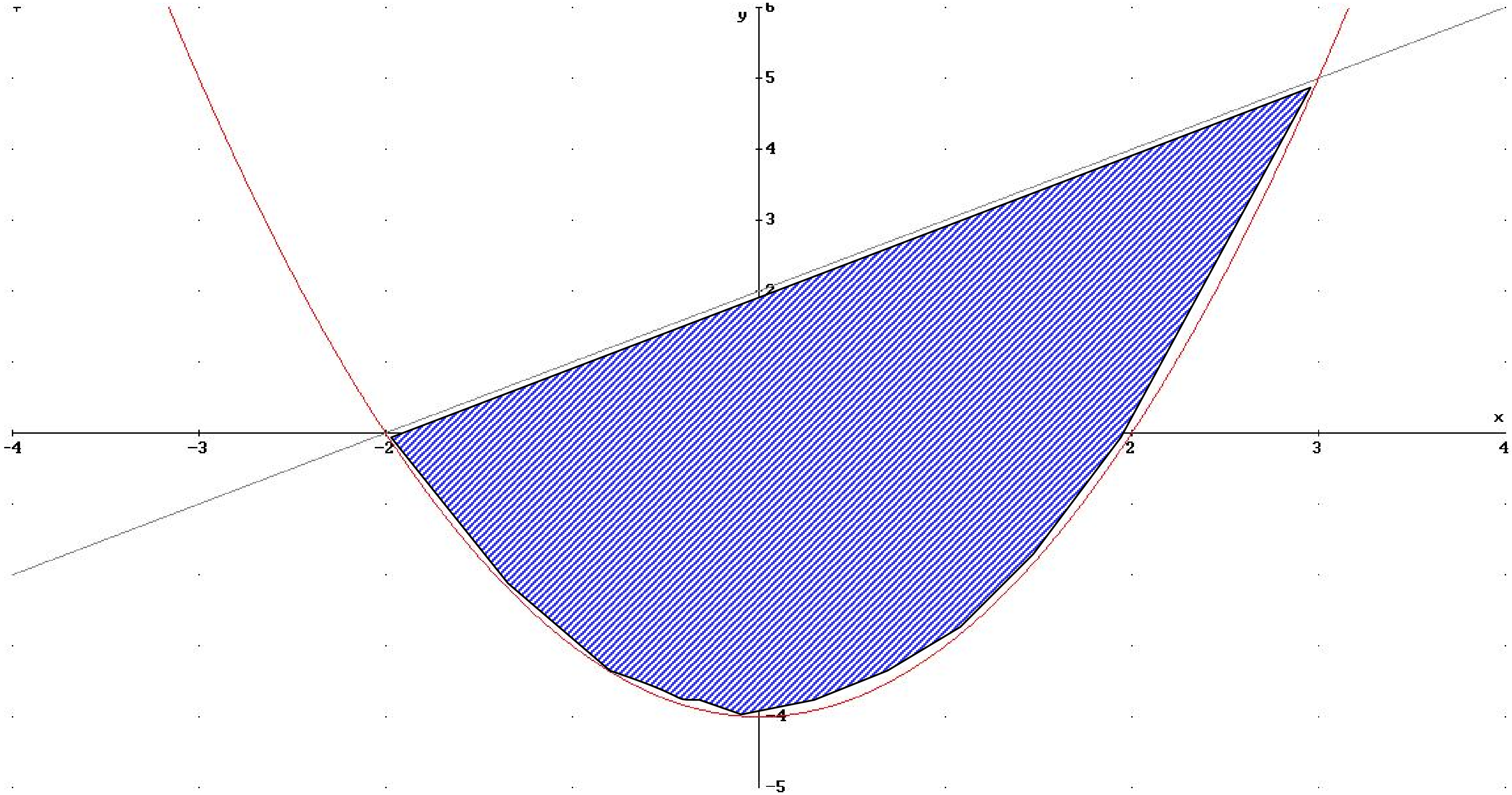
2. Berechnung des bestimmten Integrals über die Differenzfunktion

$$\int_{-2}^{3} (f(x) - g(x))dx = \int_{-2}^{3} \left(x^2 + 1 - (x+7)\right)dx = \int_{-2}^{3} \left(x^2 - x - 6\right)dx$$

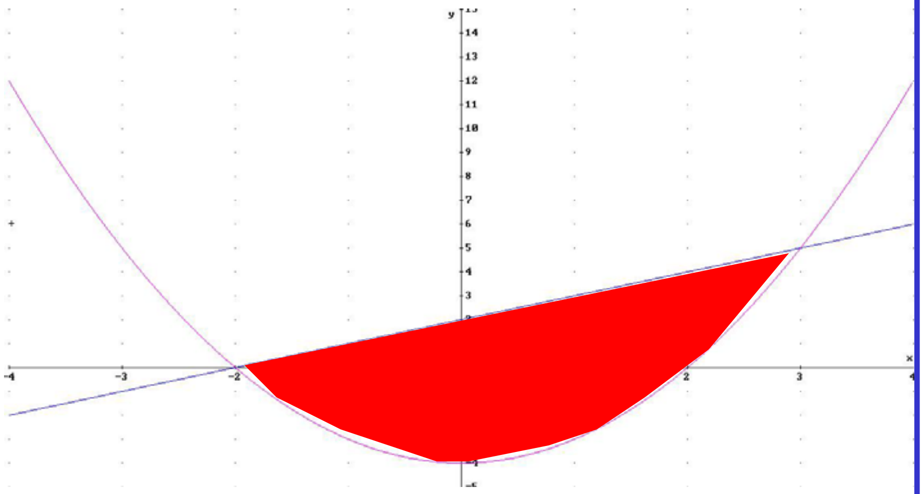
$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x\right]_{-2}^{3} = 9 - 4{,}5 - 18 - \left(\frac{-8}{3} - 2 + 12\right) = -\frac{125}{6}$$

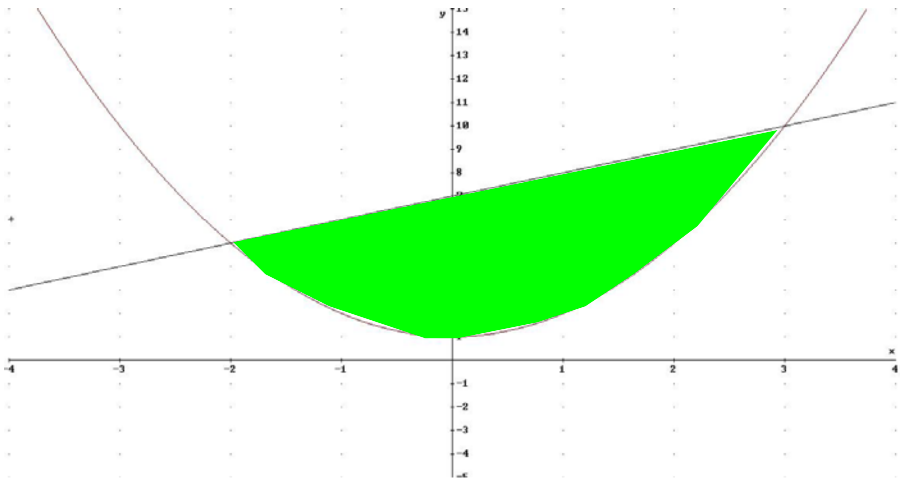
Der kompliziertere Fall-2 ?

- Gegeben sind die Funktionen $f(x)=x^2-4$ und $g(x)=x+2$.
- Gesucht ist die Fläche, die von den Graphen der Funktionen eingeschlossen wird.
- Wie lässt sich diese Fläche berechnen ?



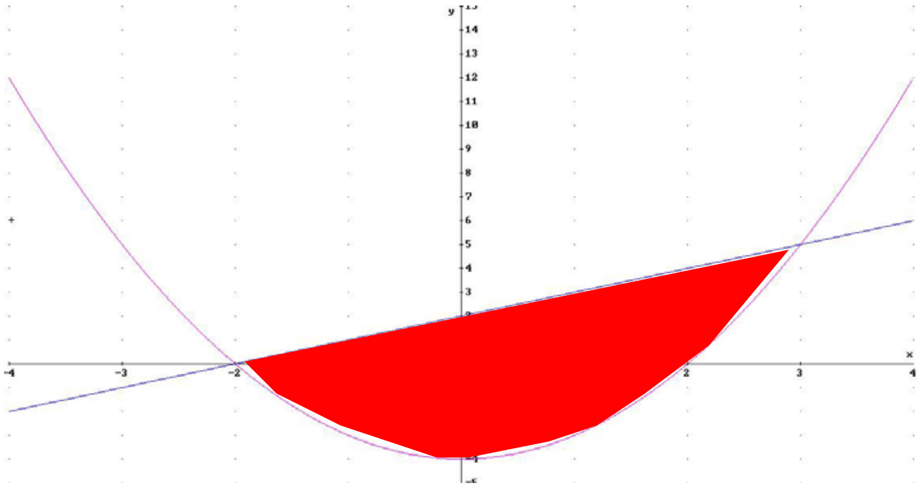
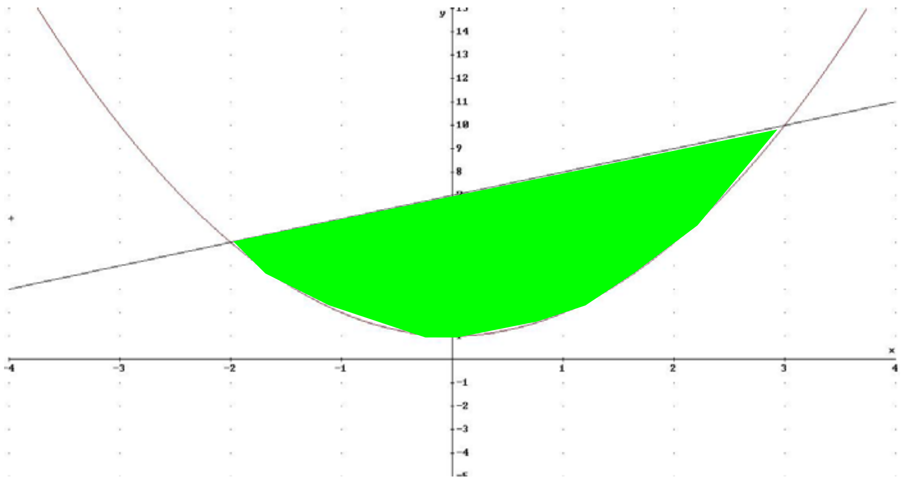
Lässt sich diese neue Aufgabe auf die bereits gelöste zurückführen ?





JA,

indem man beide Kurven so weit nach oben schiebt, bis die Fläche vollständig über der x-Achse liegt. Die Größe der Fläche ändert sich dabei nicht.

„Kurven nach oben schieben“ bedeutet:

- Addiere zu beiden Funktionsgleichungen dieselbe Konstante k.
- Ist k groß genug, dann kann man wie bereits bekannt rechnen:

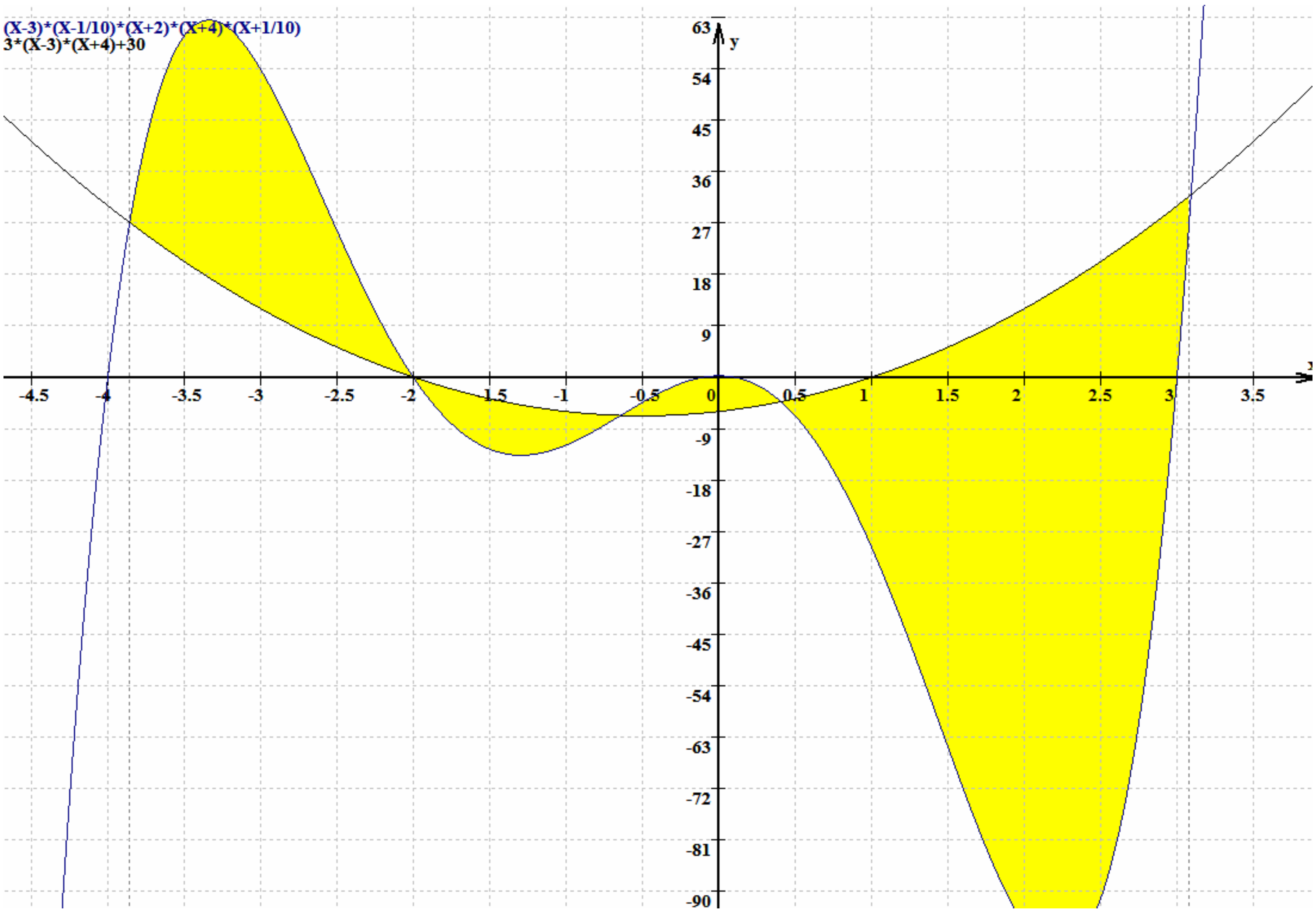
$$f(x) = x^2 - 4 \xrightarrow{+k} f_k(x) = x^2 - 4 + k$$

$$g(x) = x + 2 \xrightarrow{+k} g_k(x) = x + 2 + k$$

$$\int_{-2}^{3} \left(f_k(x) - g_k(x)\right)dx = \int_{-2}^{3} \left(x^2 - 4 + k - (x + 2 + k)\right)dx = \int_{-2}^{3} \left(x^2 - 4 - (x + 2)\right)dx$$

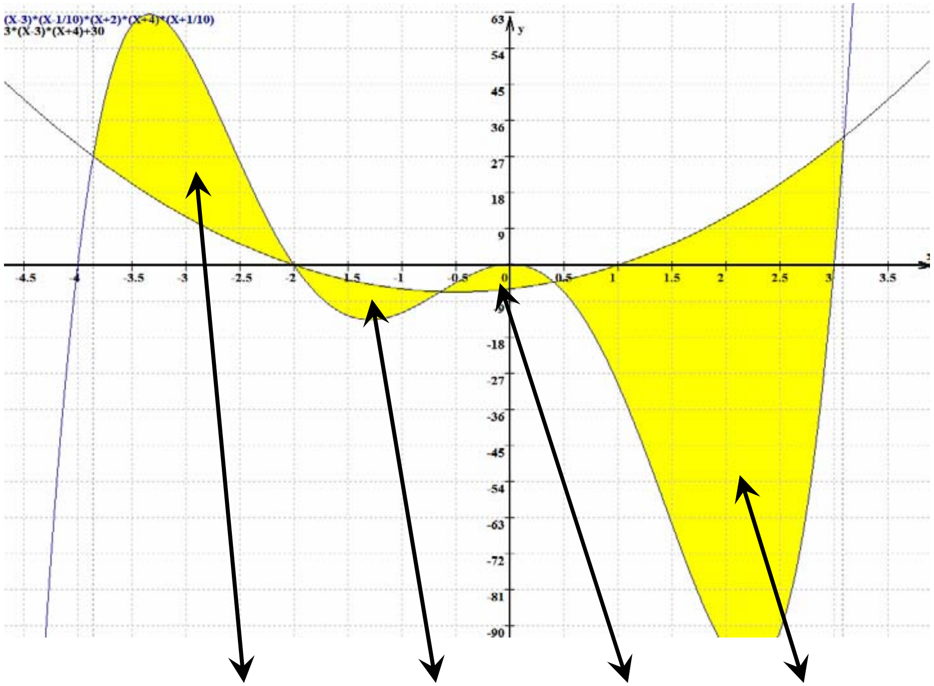
Die addierte Konstante k fällt also beim Rechnen jedenfalls heraus. D.h., es kann auch in diesem Fall wie bereits besprochen gerechnet werden.

Der noch kompliziertere Fall-3 ?



Lässt sich diese neue Aufgabe auf die bereits gelösten zurückführen ?

1. Berechne die Schnittpunkte der Funktionen
2. Die Gesamtfläche zwischen den beiden Graphen ergibt sich als Summe der Teilflächen, die entstehen, wenn man „von links nach rechts geht“.



$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

Die A_i berechnen sich wie bereits besprochen.

Zusammenfassung

Geg.: f(x) und g(x)

Ges.: Größe der Fläche, die von den Graphen der beiden Funktionen eingeschlossen wird

Berechne die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen von f und g → f(x)=g(x)

Es gibt **genau** zwei Schnittpunkte

Abszissen: x_1 und x_2

$$A = \left| \int_{x_1}^{x_2} \left(f(x) - g(x)\right) dx \right|$$

Es gibt **mehr** als zwei Schnittpunkte

Abszissen: z.B. $x_1;x_2;x_3$

$$A = \left| \int_{x_1}^{x_2} \left(f(x) - g(x)\right) dx \right| + \left| \int_{x_2}^{x_3} \left(f(x) - g(x)\right) dx \right|$$

Was ist, wenn es keinen oder genau einen Schnittpunkt gibt ?

Beispiel

Berechne den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen $f(x)=x^3-11x$ und $g(x)=2x^2-12$ eingeschlossen wird.

1. Berechnung der Schnittpunkte von f und g

$$f(x) = g(x)$$

$$x^3 - 11x = 2x^2 - 12$$

$$x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = 0$$

„Raten“: $x_1=1$

HORNER-Schema

	1	-2	-11	12
1	1	-1	-12	0

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$x_2 = 4$$

$$x_3 = -3$$

2. Berechnung der Fläche

$$\int_{-3}^{1} \left(f(x) - g(x)\right)dx = \int_{-3}^{1} \left(x^3 - 2x^2 - 11x + 12\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{11x^2}{2} + 12x\right]_{-3}^{1}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{11}{2} + 12 - \left(\frac{81}{4} + 18 - \frac{99}{2} - 36\right)$$

$$= \frac{160}{3}$$

$$\int_{1}^{4} \left(f(x) - g(x)\right)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{11x^2}{2} + 12x\right]_{1}^{4}$$

$$= -\frac{99}{4}$$

$$A = \frac{160}{3} + \left|-\frac{99}{4}\right| = \frac{937}{12} \approx 78{,}1$$

Beispiel - graphisch