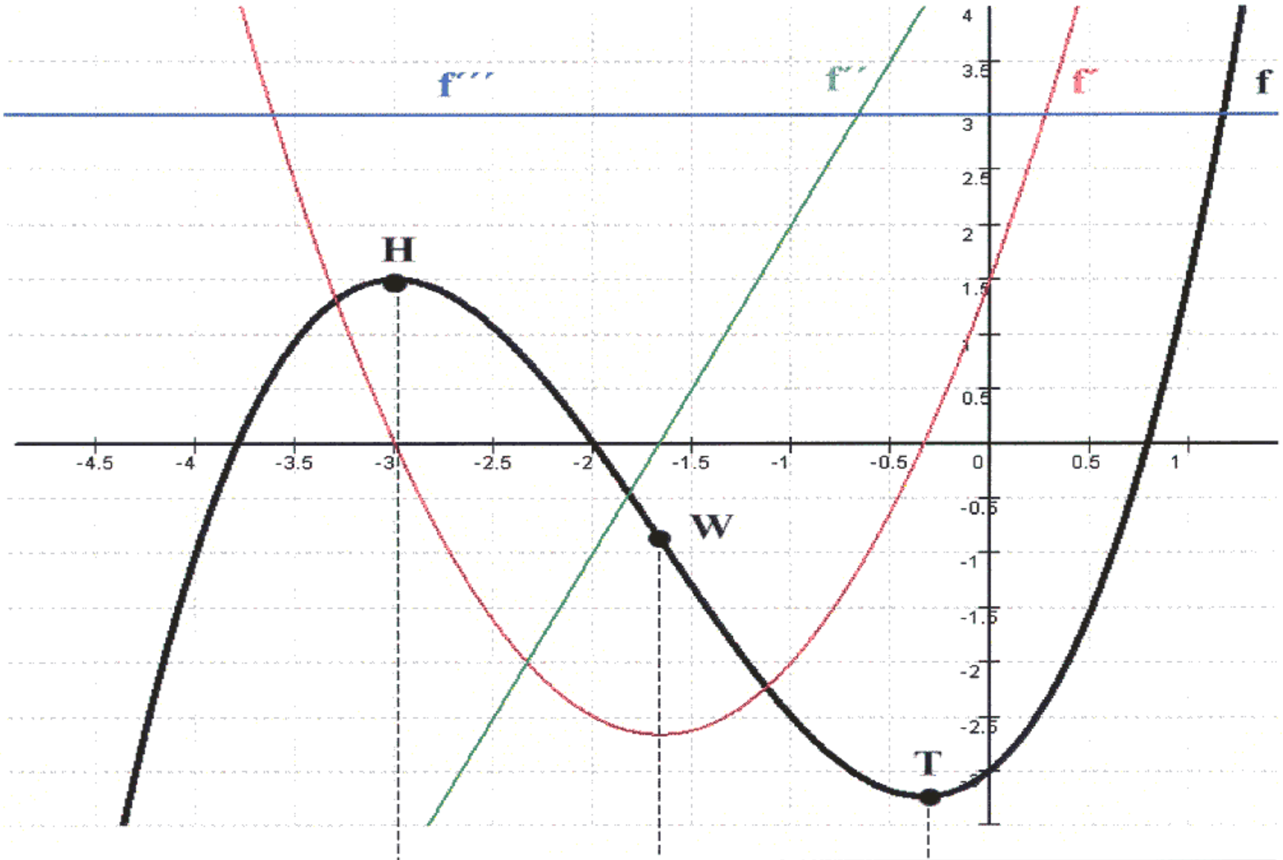
Autor: Egbert Kehl - Städtisches Gymnasium Prenzlau



f ist monoton steigend f′ ist positiv	**f ist monoton fallend** f′ ist negativ	**f ist monoton steigend** f′ ist positiv

f ist rechts gekrümmt f ´ ist monoton fallend f ´´ ist negativ	**f ist links gekrümmt** f ´ ist monoton steigend f ´´ ist positiv
↓ **f hat Hochpunkt** f ´ ist 0 (notw. Bed. für EP) (+/-) VZW von f ´ (also fallend) f ´´ ist negativ	↓ **f hat Tiefpunkt** f ´ ist 0 (notw. Bed. für EP) (-/+) VZW von f ´ (also steigend) f ´´ ist positiv

↓ **f hat Wendepunkt** f ´ hat Extremum (Tiefpunkt) f ´´ ist 0 (notw. Bed. für WP) (-/+) VZW von f ´´ f ´´´ ist positiv

Merke!

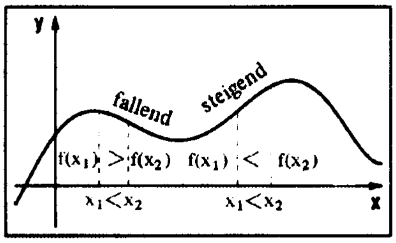
f	**N**	**E**	**W**		
f ´		**N**	**E**	**W**	
f ´´			**N**	**E**	**W**

N – Nullstelle
E – Extrempunkt
W - Wendepunkt

Autor: Egbert Kehl - Städtisches Gymnasium Prenzlau

Monotonie und Krümmungsverhalten

Def.: Die Funktion f sei auf dem Intervall I = [a;b] definiert. Sie heißt **monoton steigend** (*fallend*) auf I, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$). Gilt sogar nur „<" bzw. „>", spricht man von strenger Monotonie.



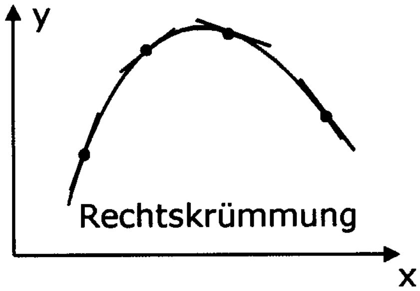
Das Monotonieverhalten wird jedoch mit der 1. Ableitung einer Funktion f, die das Steigungsverhalten von f beschreibt, untersucht. Es gilt dabei:

$f'(x) > 0 \Rightarrow$ f ist streng monoton steigend

$f'(x) < 0 \Rightarrow$ f ist streng monoton fallend

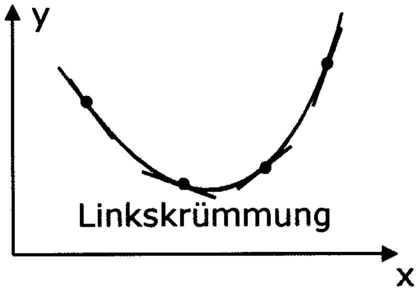
Der Graph einer Funktion f heißt in einem Intervall I

rechts gekrümmt, wenn die Steigung von f, d.h. also f', streng monoton abnimmt.



Wenn f' kleiner wird, muss f'' negativ sein, da f'' den Anstieg von f' beschreibt.

links gekrümmt, wenn die Steigung von f, d.h. also f', streng monoton zunimmt.



Wenn f' größer wird, muss f'' positiv sein, da f'' den Anstieg von f' beschreibt.

Extrem- und Sattelpunkte

Waagerechte Tangente $f'(x_E) = 0$	+	Linkskrümmung $f''(x_E) > 0$ oder (-/+) VZW von $f'(x)$ bei x_E	$\Rightarrow$	**Tiefpunkt**
Waagerechte Tangente $f'(x_E) = 0$	+	Rechtskrümmung $f''(x_E) < 0$ oder (+/-) VZW von $f'(x)$ bei x_E	$\Rightarrow$	**Hochpunkt**
Waagerechte Tangente $f'(x_E) = 0$	+	Krümmungswechsel kein VZW von $f'(x)$ bei x_E	$\Rightarrow$	**Sattelpunkt**

Hinweis: Ist die 2. Ableitung an einer vermutlichen Extremstelle 0, kann keine Aussage bzgl. der Existenz eines Extrem- oder Wendepunktes gemacht werden. Es muss dann der Monotoniewechsel untersucht werden.

Wendepunkte

An einer Wendestelle x_w ändert sich das Krümmungsverhalten einer Funktion. Die 1. Ableitung hat also bei x_w ein relatives Extremum (vgl. LB S.185 Abb.10).

Daher ist $\mathbf{f''(x_w) = 0}$. (notw. Bed. für WP)

Zum Nachweis einer vermutlichen Wendestelle nutzt man $\mathbf{f'''(x_w) \neq 0}$ oder weist den **VZW von** f'' bei x_w nach.