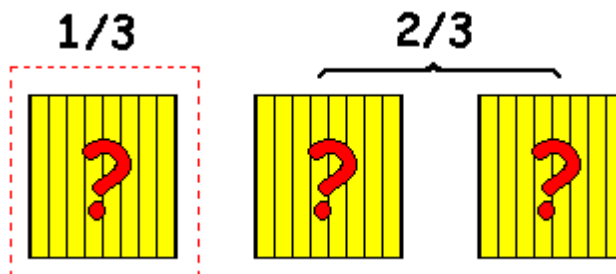


## Die Ziege unter der Lupe

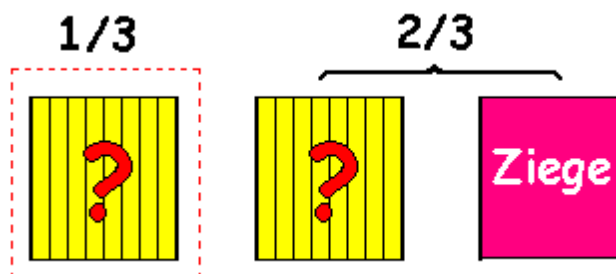
Natürlich kann der Spieler keine Gewissheit bei der Wahl eines Tores haben. Vom Standpunkt des Spielers ist es purer Zufall (ich möchte mich hier nicht auf esoterische Diskussionen einlassen) ob er das richtige Tor wählt oder nicht. Wir können also nur Wahrscheinlichkeiten für eine erfolgreiche Wahl angeben.

Hinter jedem Tor kann er den Mercedes mit gleicher Wahrscheinlichkeit erwarten. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Tor, welches der Spieler ausgewählt hat, das richtige ist, liegt also bei  $1/3$  (oder grob 33,3%). Die Wahrscheinlichkeit, dass sich der Wagen nicht hinter dem gewählten Tor befindet, also hinter einem der anderen Tore steht ist folglich  $2/3$  (ungefähr 66,6%).

Um konkret zu werden nehmen wir einmal an, dass der Spieler im ersten Schritt Tor 1 gewählt hat.



Jetzt erhält er vom Moderator **zusätzliche Information** über den Standort des Wagens! **Dadurch, dass der Moderator ein Tor öffnet, erfährt der Spieler wie sich die  $2/3$  Wahrscheinlichkeit auf die nicht gewählten Tore verteilen. Das Tor, welches der Moderator geöffnet hat, erhält nichts von den  $2/3$  bekommen, das andere Tor bekommt alles.**



Nun kann der Spieler wechseln. Die ursprünglichen Wahrscheinlichkeiten haben sich nicht geändert, jedoch weiß der Kandidat jetzt wie sich die  $2/3$  Erfolgswahrscheinlichkeit verteilen.

Damit ist die Situation wie folgt:

**Wenn der Spieler bei seiner ersten Wahl bleibt, hat er mit der Wahrscheinlichkeit  $1/3$  ein Auto gewonnen. Wenn der Spieler das Tor wechselt, hat er mit Wahrscheinlichkeit  $2/3$  das richtige Tor.**

---

## Eine Ziegenherde

Ich beschreibe eine kleine Abwandlung des Spieles, die die gemachten Überlegungen vielleicht leichter nachvollziehbar machen.

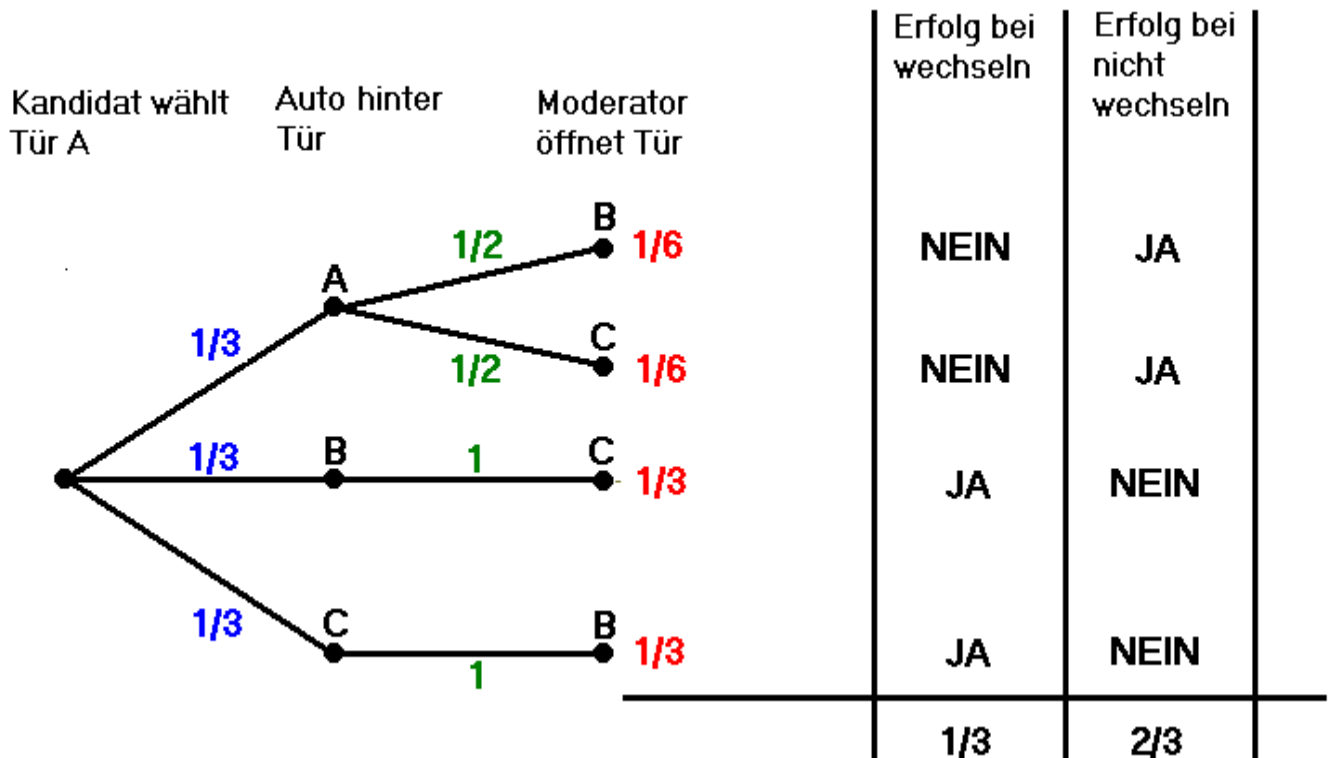
Diesmal muss der Spieler nicht aus drei Toren das richtige wählen, sondern aus **1000** !

Die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Wahl richtig ist, ist  $1/1000$ . Die Wahrscheinlichkeit, dass der Wagen hinter irgendeinem der anderen Tore steht, ist dagegen  $999/1000$ . Jetzt öffnet der Moderator fast alle, nämlich 998, der nicht ausgewählten Tor - allesamt Ziegentore, versteht sich. Würdest Du wechseln? Glaubst Du, Du hast auf Anhieb richtig gewählt, oder könnte der Wagen nicht auch hinter einem der 999 anderen Tore gewesen sein?

Wenn Du sagst: "Ja, hier würde ich schon wechseln", dann überlege einmal genau warum Du hier wechseln wolltest. Wahrscheinlich würde das gleiche Argument auch beim ursprünglichen Spiel mit 3 Toren funktionieren.

## Die mathematische Ziege

Für eine mathematische Beschreibung des Ziegenproblems bietet sich ein Baumdiagramm an, in dem **alle** möglichen Ausgänge und ihre Wahrscheinlichkeiten eingezeichnet sind. Wenn wir dabei bleiben, dass der Kandidat Tür A gewählt hat, sieht das Diagramm so aus:



Die blauen Zahlen sind die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass das Auto hinter einer der jeweiligen Tür ist. Diese Wahrscheinlichkeit ist für alle Türen gleich, nämlich  $1/3$ .

Die grünen Zahlen sind die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass der Moderator eine bestimmte Tür öffnet:

- Wenn der Kandidat Tür A wählt und das Auto tatsächlich dahinter ist, kann der Moderator Tür B oder C öffnen, beide sind gleichwahrscheinlich, haben die Wahrscheinlichkeit  $1/2$ .
- Wenn der Kandidat Tür A gewählt hat, das Auto aber hinter Tür B ist, muss der Moderator Tür C ganz sicher (mit Wahrscheinlichkeit  $1$ ) öffnen.
- Wenn der Kandidat Tür A gewählt hat der Prachtschlitten hinter Tür C lauert, muss der Moderator Tür B öffnen (ganz sicher - mit Wahrscheinlichkeit  $1$ )

So, jetzt können wir uns anschauen, welche Spielsituationen es gibt, wie wahrscheinlich sie sind und ob es günstig ist zu wechseln oder nicht:

1. Der oberste Pfad im Baum beschreibt, die Situation, dass das Auto hinter Tür A steht und der Moderator Tür B öffnet. Beides zusammen hat die Wahrscheinlichkeit  $1/6$  ( $=1/3 \times 1/2$ ) und in dieser Situation wäre es günstig nicht zu wechseln.
2. Der zweite Pfad beschreibt, dass das Auto hinter Tür A steht und der Moderator Tür C öffnet. Wie oben ist die Wahrscheinlichkeit hierfür  $1/6$  und es wäre gut nicht zu wechseln.
3. Beim dritten Pfad steht das Auto hinter Tür B und der Moderator öffnet Tür C. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist  $1/3$  und es wäre klug zu wechseln.
4. Im letzten Fall steht das Auto hinter Tür C, der Fernsehmann öffnet Tür B. Das geschieht mit der Wahrscheinlichkeit  $1/3$ , und man gewinnt wenn man wechselt.

Unterm Strich erkennen wir:

In den beiden Fällen 1 und 2 wäre es klug nicht zu wechseln. Diese Fälle treten mit der Wahrscheinlichkeit  $1/6 + 1/6 = 1/3$  auf. In den Fällen 3 und 4 gewinnt man wenn man wechselt. Die Wahrscheinlichkeit für diese Situationen ist  $1/3 + 1/3 = 2/3$ . Dies sind alle Fälle die auftauchen können, wenn der Kandidat Tür zu Beginn Tür A gewählt hat.

Also: Wenn man am Anfang Tür A wählt, ist die Wahrscheinlichkeit auf ein Auto ohne Wechsel  $1/3$  und mit Wechsel  $2/3$ .